ÉNONCÉ.

$$\text{sinc} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

. sinc est conti sur $\mathbb{R}$. et $\int_0^{\infty} \text{sinc} = \frac{\pi}{2}$

LEÇONS:

239

235

236

RÉFS: [ZQ] Zuily Queffelec - Analyse pr l'agreg p 315.

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. $\int_0^{\infty} |\text{sinc}|$ diverge

2. $\int_0^{\infty} \text{sinc}$ CV.

DÉMO

BUT : $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

→ MOTIV :

On s'intéresse à $\int_0^{\infty}$ de sinc et on veut calculer val.

Pas évident : on peut mq sinc n'est pas Lebesgue intégrable. Donc on ne peut pas utiliser direct les th. sur l'intégrale de Lebesgue.

Posons : $\mathcal{L} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \longrightarrow \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-\lambda t} \operatorname{sinc}(t)}_{f(\lambda,t)} dt \end{cases}$

- ici, ajout de exp va garantir l'absolue CV de l'intégrale dès que $\lambda > 0$

Donc accès à théo dériv etc !

Et on mq que $\mathcal{L}(0) = \int$ de voulue..

On va étudier $\mathcal{L}$ en tant que fonction déf par intégrale.

PLAN.

① mq $\mathcal{L}$ définie, continue sur $\mathbb{R}_+$

Ok. mnt on veut valeur de $\mathcal{L}(0)$ ss une autre forme. On va expr $\mathcal{L}$ différemment

② mq $\mathcal{L}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calcul de $\mathcal{L}'$

③ calcul de $\mathcal{L}$ et conc

①. • $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $f(\lambda, \cdot)$ est continue donc mesurable. (sinc est conti en 0 ĉ prolong).

On sépare le pb à l'∞.

$$\mathcal{L}(\lambda) = \underbrace{\int_0^1 f(\lambda,t)\, dt}_{\mathcal{L}_1(t)} + \underbrace{\int_1^{\infty} f(\lambda,t)\, dt}_{\mathcal{L}_2(t)}.$$

• $\mathcal{L}_1$: • $\forall t > 0$, $f(\cdot, t)$ est conti sur $\mathbb{R}_+$.

. $|f(\lambda,t)| \leq 1 \in L^1([0,1])$

. Donc par théorème de continuité, $\mathcal{L}_1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

• $\mathcal{L}_2$: Soit $\lambda > 0$, $A > 0$ → ramène segment.

$$J_A(\lambda) = \int_1^A \frac{e^{-\lambda t}}{t} \sin(t)\, dt \quad \Big\} \begin{cases} u' = \sin & u = -\cos \\ v = \frac{e^{-\lambda t}}{t} & v' = \end{cases}$$

ipp : $\begin{cases} u' = \sin & u = -\cos \\ v = \frac{e^{-\lambda t}}{t} & v' = -\left(\frac{1}{t^2} + \frac{\lambda}{t}\right) e^{-\lambda t} \end{cases}$

$$I_A(\lambda) = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{t}\cos(t) \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{\cos(t)\, e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{t\lambda}{t^2}\right)}_{g(\lambda,t)} dt.$$

Or, $\forall t > 1$, $g(\cdot, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall t > 1, \forall \lambda \geqslant 0$, $|g(\lambda,t)| \leqslant \frac{|1+t\lambda|}{t^2} e^{-\lambda t} \leqslant \frac{2}{t^2} \in L^1([1,+\infty[)$ $y \geqslant 0 \Rightarrow y e^{-y} \leqslant 1$.

Par théorème de continuité, $\int_1^\infty g(\lambda,t)\,dt$ est bien définie, continue.

$\hookrightarrow$ il faut dire ça avant de faire $A \to +\infty$.

$L_2(\lambda) = \lim\limits_{A\to\infty} I_A(\lambda) = \underbrace{\cos(1) e^{-\lambda}}_{\text{conti}} - \int_1^\infty g(\lambda,t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

Donc L est bien définie, continue sur $\mathbb{R}+$.

(2). Soit $\varepsilon > 0$. $\to$ je vais me restr. à un compact.

inté • $\forall t > 0, \forall \lambda \geqslant \varepsilon$, $|f(\lambda,t)| \leqslant e^{-\lambda t} \leqslant \underbrace{e^{-\varepsilon t}}_{\text{indé}} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ $(*)$

indé de λ : va servir ensuite

• régularité • $\forall t > 0$, $f(\cdot, t)$ dérivable et $\forall \lambda > 0$

$\partial_\lambda f(\lambda,t) = -e^{-\lambda t}\, t\, \mathrm{sinc}(t) = -\sin(t) e^{-\lambda t}$

• domination. • $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \lambda \geqslant \varepsilon$, $\forall t > 0$, $|\partial_\lambda f(t,\lambda)| \leqslant e^{-\lambda t} \leqslant e^{-\varepsilon t} \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

indé de λ

Par th dériv ss signe $\int$, L dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $[\varepsilon, +\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$ et prop locale.

Calculons L' :

Et $\forall \lambda > 0$, $L'(\lambda) = \int_0^\infty -\sin(t)\, e^{-\lambda t}\,dt$.

on a levé pb $\int$bilité en 0, on peut calculer.

$$= \int_0^\infty -e^{-\lambda t}\sin(t)\,dt \quad \to \int \text{de sin et exp : dif sin} \to \mathrm{Im}.$$

$$= -\mathrm{Im}\left[\int_0^\infty e^{(i-\lambda)t}\,dt \right]$$

$$= -\mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda} \right]_{t=0}^{t=\infty} \right)$$

$\left|\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\right| = \frac{e^{-\lambda t}}{|i-\lambda|} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$

$$= -\mathrm{Im}\left(\frac{-1}{i-\lambda}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-\lambda-i}{\lambda^2+1}\right) = \frac{-1}{1+\lambda^2}.$$

$\to$ je commence à prendre.

③ Connaît une primitive :

Donc $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall \lambda > 0$, $\mathcal{L}(\lambda) = C - \arctan(\lambda)$.

<u>calculons C</u> :

→ calcul de C. On regarde la lim en $+\infty$: On applique le th. de CV dominée

On a la domination en (*)

On a : $C - \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{L}(n) = \int_0^{\infty} \lim\limits_{n \to +\infty} f(n, \cdot) = 0$.

passage discret

Clairement lim = 0 et domi ici : (*)

Ainsi, $\forall \lambda > 0$, $\mathcal{L}(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda)$

On peut conc :

$\int_0^{\infty} \text{sinc} = \mathcal{L}(0) = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \mathcal{L}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda) = \frac{\pi}{2}$.

Conti'

DÉMO DES RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. $\int_0^{\infty} \text{sinc}$ CV.

On se ramène à faire un segment : « à la main ».

$$\forall A > 0, \int_0^A \frac{\sin(t)}{dt} = \left[\frac{1-\cos(t)}{t} \right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{t^2}(1-\cos(t))\,dt$$ via IPP (fait C^1)

$$= \frac{1-\cos(A)}{A} - 0 + \underbrace{\int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt}_{I_A}.$$

- I_A CV qd $A \to +\infty$ car : • conti $]0, +\infty[$
  - prolongeable en 0 : $\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$
  - en $+\infty$: $\left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{2}{t^2}$
- $\left|\frac{1-\cos(A)}{A}\right| \leq \frac{2}{A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0.$

2. $\int_0^{\infty} |\text{sinc}| = +\infty$

$$\cdot \int_0^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(y)|}{y + k\pi}\,dy$$ via CV : $\begin{cases} y = x - k\pi \\ dy = dx. \end{cases}$

$|\sin(y + k\pi)| = |\sin(y)|$

$$\geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin(x)|\,dx$$

$0 \leq y \leq \pi \Rightarrow \frac{1}{y + k\pi} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$

$$\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

. CV : $n = k+1$

. $\sin \geq 0$ sur $[0, \pi]$.

$$\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty.$$